

Devoir Commun. 2h00
26 novembre 2005

Le devoir dure 2 heures. Les calculatrices sont autorisées, mais :

l'échange de tout matériel est interdit

Les brouillons ne sont pas acceptés dans les copies. Une copie non soignée (propreté, orthographe, etc.) sera sanctionnée.

Exercice 1. Nombres et Calculs (8 points).

1. Écrire le nombre A sous forme de fraction irréductible $A = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$

2. Simplifier le nombre $B = \sqrt{75} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12}$

3. Calculer puis dire si la phrase est vraie ou fausse :

a. $\frac{3 \times 7}{2 \times 11} \in \mathbb{N}$

b. $\frac{252}{28} \in \mathbb{Z}$

c. $\frac{2^5 \times 2^7}{2^2 \times 2^9} \in \mathbb{Z}$

d. $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) \in \mathbb{Q}$

4. On donne $D = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Calculer D^2 et en déduire que D est en fait un entier naturel.

Exercice 2. Nombres premiers (10 points)

Les trois questions sont indépendantes.

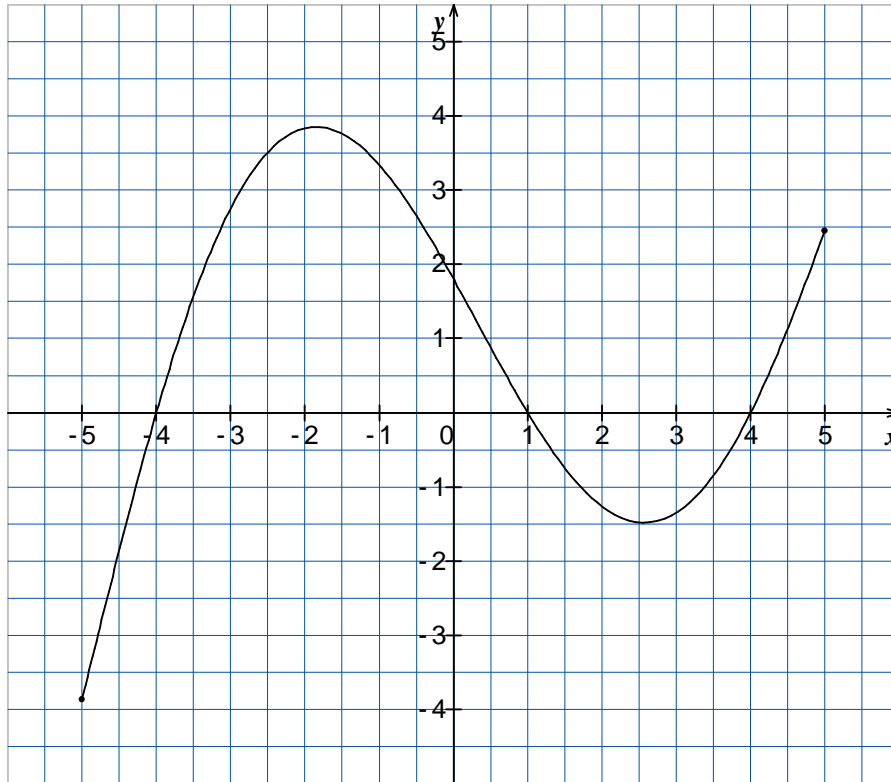
1. Donner la définition d'un nombre premier.

2. Décomposer 1584 et 78408 en produit de facteurs premiers et en déduire :
 - a) la décomposition en produit de facteurs premiers de 1584^2 .
 - b) l'écriture de $\sqrt{1584}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers naturels, b étant le plus petit possible.
 - c) la forme irréductible de la fraction $\frac{1584}{78408}$

3. On s'intéresse aux nombres entiers qui peuvent s'écrire $p \times q$ où p et q sont deux nombres premiers distincts : 77 et 10 en sont des exemples.
 - a) Donner deux autres exemples de tels nombres en expliquant pourquoi.
 - b) Ecrire la liste complète des diviseurs de 77 et de 10.
 - c) Dans le cas général, quelle est la liste des diviseurs d'un nombre de la forme $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts ?
 - d) Donner (sans justification) la liste des diviseurs d'un nombre de la forme $p \times q \times r$ où p , q et r sont des nombres premiers distincts.
 - e) Donner un exemple de tel nombre puis écrire la liste complète de ses diviseurs.

Exercice 3. Lecture graphique (12 points)

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f représentée dans le repère ci-dessous.



1. Quel l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Donner les images des réels 0 et -2 par la fonction f .
3. Déterminer graphiquement $f(-2,5)$ et $f(3)$.
4. Donner les antécédents des réels -1 et 0 par la fonction f .
5. Donner un nombre qui n'a qu'un seul antécédent par f .
6. Résoudre graphiquement les équations suivantes :
 - a) $f(x) = 0$
 - b) $f(x) = 5$
7. Résoudre graphiquement l'inéquation suivante : $f(x) < 0$
8. Dresser le tableau de variation de f .
9. Donner, s'ils existent, le minimum et le maximum de la fonction f .

Exercice 4. Résolution d'équations (12 points)

1. Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{x-2}{x+1} = \frac{5}{3}$

b. $2x - 3(x+5) = 4(x-2) - 7$

c. $(x-5)(2-x) + 4(x-5) = 0$

d. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

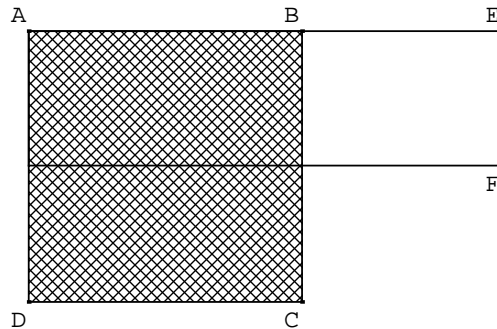
2. Mise en équation.

A l'occasion d'un remembrement, le champ carré de Jean a été transformé en champ rectangulaire.

Deux cotés opposés du champ carré ont été augmentés de 300 m, les deux autres cotés ont été diminués de 200 m, afin d'obtenir un champ rectangulaire.

Après le remembrement, Jean constate que l'aire de son champ a diminué de 10 000 m².

Indication : le remembrement consiste à changer la forme des domaines agricoles pour faciliter l'exploitation des terres.



On note x la mesure du côté du champ carré initial.

En trouvant une équation vérifiée par x , trouver la longueur du champ initialement ?