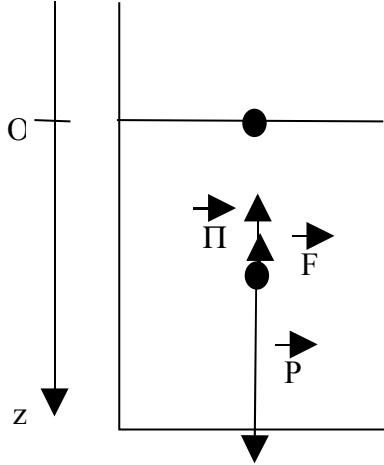


1. Étude de la chute d'une particule dans un liquide visqueux :

1.1. $F = f \times v$ $f = \frac{F}{v}$ $[f] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{[m \times a]}{[v]} = \frac{[M] \times [L] \times [T]^{-2}}{[L] \times [T]^{-1}} = [M] \times [T]^{-1}$

($[F]=[m \times a]$ d'après la deuxième loi de Newton) donc f s'exprime bien en $kg \cdot s^{-1}$

1.2.



\vec{F} : force de frottement

\vec{P} : poids d'une particule

$\vec{\Pi}$: poussée d'Archimède

1.3. Considérons comme système une particule de masse m , soumise aux trois forces précédentes, dans un référentiel terrestre supposé galiléen. En appliquant la deuxième loi de Newton, il vient :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{\Pi} = m \times \vec{a}$$

En projetant sur l'axe Oz vertical, on obtient : $P - F - \Pi = m \times a = m \times \frac{dv}{dt}$

$P = m \cdot g$ et $\Pi = \rho_l \cdot V_s \cdot g$ (V_s étant le volume de la particule solide)

Soit $\frac{dv}{dt} = - \frac{f}{m} \times v + g \times (1 - \frac{V_s}{m} \times \rho_l)$

La masse volumique d'une particule est $\rho_s = \frac{m}{V_s}$, on remplace m par $\rho_s \times V_s$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{f}{m} \times v + g \times (1 - \frac{V_s}{\rho_s \times V_s} \times \rho_l)$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{f}{m} \times v + g \times (1 - \frac{\rho_l}{\rho_s}) = - \frac{f}{m} \times v + g \times (\frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_s})$$
 Soit finalement: $\frac{dv}{dt} + \frac{f}{m} \times v = g \times (\frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_s})$

1.4. Quand la vitesse limite est atteinte, $\frac{dv}{dt} = 0$ donc on obtient : $\frac{f}{m} \times v_l = g \times (\frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_s})$

On retrouve l'expression proposée pour la vitesse limite: $v_l = (\frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_s}) \times \frac{m}{f} \cdot g$

Calculons sa valeur: $v_l = 9,8 \times \frac{(1,5 \cdot 10^3 - 1,0 \cdot 10^3)}{1,5 \cdot 10^3} \times \frac{5,0 \cdot 10^{-14}}{3,1 \cdot 10^{-12}}$ soit $v_l = 53 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$

1.5. $v(t) = v_l \times (1 - e^{-\frac{f}{m}t})$ $v(t_1) = 0,99 \cdot v_l$ soit $0,99 \times v_l = v_l \times (1 - e^{-\frac{f}{m}t_1})$ d'où $0,99 = 1 - e^{-\frac{f}{m}t_1}$

$$e^{-\frac{f}{m}t_1} = 1 - 0,99 = 0,01 \text{ donc } - \frac{f}{m}t_1 = \ln(0,01)$$

$$t_1 = - \frac{m}{f} \ln(0,01) = - \frac{5,0 \cdot 10^{-14}}{3,1 \cdot 10^{-12}} \ln(0,01) \text{ soit } t_1 = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ s} = 74 \text{ ms}$$

1.6.a. Le temps caractéristique est égal à l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe à la date $t = 0$ s avec l'asymptote horizontale, on obtient un temps caractéristique d' environ $\tau_1 = 16$ ms.
Autre méthode : $t = \tau_1$ quand $v = 0,63 v_l = 33 \cdot 10^{-3}$ m/s. Sur le graphe, on lit environ $\tau_1 = 16$ ms.

1.6.b. Sur le graphique on observe une première phase ($t < 5 \tau_1$) où la vitesse de la particule augmente rapidement au début, puis de plus en plus lentement. C'est le **régime transitoire**.

Sur la seconde partie ($t \geq 5 \tau_1$) de la courbe, la vitesse reste constante et égale à la vitesse limite v_l . C'est le **régime asymptotique** (ou permanent). La particule est animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

2. Application : modélisation simple d'un bac à décantation à flux horizontal :

2.1. Si la particule reste à la surface de l'eau, elle va se déplacer à la vitesse v_h sur une distance L

$$v_h = \frac{L}{\tau_2} \quad \text{donc} \quad \tau_2 = \frac{L}{v_h} = \frac{1,0}{0,10} \quad \text{soit} \quad \tau_2 = 10 \text{ s}$$

2.2. Pour la chute parfaitement verticale, la vitesse limite est atteinte au bout de $5\tau_1$, soit moins de 0,10 s.

Ce qui représente moins de 1 % de la durée nécessaire (τ_2) pour parcourir la distance L .

A peine dans l'eau, la bille possède une vitesse verticale $v_z = v_l$.

De plus avec le courant d'eau, elle possède une vitesse horizontale v_h .

Le vecteur vitesse de la bille est donc $\vec{v} = \vec{v}_l + \vec{v}_h$

2.3.	Projection selon Ox	Projection selon Oz
Accélération	$a_x(t) = 0$	$a_z(t) = 0$
vitesse	$v_x(t) = v_h$	$v_z(t) = v_l$
Position	$x(t) = v_h \cdot t$	$z(t) = v_l \cdot t$

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t) \quad \text{Soit en intégrant : } x(t) = v_h \times t + Cte = v_h \times t \quad (\text{car à } t = 0 \text{ s, } x_0 = 0)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z(t) \quad \text{Soit en intégrant : } z(t) = v_l \times t + Cte = v_l \times t \quad (\text{car à } t = 0 \text{ s, } z_0 = 0)$$

2.4. $z(t) = v_l \times t$ et $t = \frac{x(t)}{v_h}$ d'où $z(t) = \frac{v_l}{v_h} \times x(t)$

La trajectoire de la particule est bien une droite de coefficient directeur : $\alpha = \frac{v_l}{v_h}$

or d'après la question **1.4** : $v_l = \left(\frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_s}\right) \times \frac{m}{f} \times g$ Soit $\alpha = g \times \left(\frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_s}\right) \times \frac{m}{f \times v_h}$

2.5. Pour $x = L$ et $z = H_0$ on a $H_0 = g \times \left(\frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_s}\right) \times \frac{m_c}{f \times v_h} \times L$

$$\text{Soit } m_c = \frac{H_0}{L \times g} \times \frac{\rho_s \times f \times v_h}{\rho_s - \rho_l}$$

$$m_c = \frac{0,54}{1,0 \times 9,8} \times \frac{1,5 \cdot 10^3 \times 3,1 \cdot 10^{-12} \times 0,10}{1,5 \cdot 10^3 - 1,0 \cdot 10^3} \quad \text{soit } m_c = 5,1 \cdot 10^{-14} \text{ kg}$$

2.6. On souhaite connaître $z(t)$ pour $x = L$.

Si $z(t) < H_0$ la bille passera au dessus du bac de récupération.

Si $z(t) > H_0$ la bille tombe bien dans le bac.

On peut, pour raisonner, écrire $z(t) = k \times m \times L$

Si $m < m_c$ alors $z(t) < H_0$: La particule va tomber après le bac de récupération.

Si $m > m_c$ alors la particule va tomber dans le bac de récupération.