

Exercice 1 Nombres et Calculs

1. Écrire le nombre A sous forme de fraction irréductible $A = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$.

2. Simplifier le nombre $B = \sqrt{75} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12}$.

3. Calculer puis dire si la phrase est vraie ou fausse :

a) $\frac{3 \times 7}{2 \times 11} \in \mathbb{I}$. b) $\frac{252}{28} \in \mathbb{U}$. c) $\frac{2^5 \times 2^7}{2^2 \times 2^9} \in \mathbb{U}$. d) $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) \in \mathbb{D}$.

4. On donne $D = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Calculer D^2 et en déduire que D est en fait un entier naturel.

Bonus : Donner une valeur arrondie à deux chiffres après la virgule de $C = -5 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^2$.

$$1. A = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{1 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 2 \times 2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$2. B = \sqrt{75} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} \\ = \sqrt{25 \times 3} - 2\sqrt{9 \times 3} + 5\sqrt{4 \times 3} \\ = \sqrt{25} \times \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3} + 5 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} \\ = 5\sqrt{3} - 2 \times 3\sqrt{3} + 5 \times 2\sqrt{3} \\ = 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} \\ = \boxed{9\sqrt{3}}$$

3. a) $\frac{3 \times 7}{2 \times 11} = \frac{21}{22} \notin \mathbb{I}$: la phrase est **fausse** (plus précisément $\frac{3 \times 7}{2 \times 11} \in \mathbb{D}$ et $\frac{3 \times 7}{2 \times 11} \notin \mathbb{A}$).

b) $\frac{252}{28} = \frac{9 \times \cancel{28}}{\cancel{28}} = 9 \in \mathbb{U}$: la phrase est **vraie** (plus précisément $\frac{252}{28} \in \mathbb{I}$).

c) $\frac{2^5 \times 2^7}{2^2 \times 2^9} = \frac{2^{5+7}}{2^{2+9}} = \frac{2^{12}}{2^{11}} = 2^{12-11} = 2^1 = 2 \in \mathbb{U}$: la phrase est **vraie** (plus précisément $\frac{2^5 \times 2^7}{2^2 \times 2^9} \in \mathbb{I}$).

d) $\underbrace{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}_{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2} = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4 \in \mathbb{D}$: la phrase est **vraie** (plus précisément $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) \in \mathbb{I}$).

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$4. D^2 = \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \right)^2 = \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \times \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \times \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \right)^2 = 7 + 4\sqrt{3} \text{ et } \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \right)^2 = 7 - 4\sqrt{3} \\ 2 \times \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \times \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(7 - 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})} = 2 \times \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 2 \times \sqrt{49 - 16 \times 3} = 2 \times \sqrt{1} = 2 \end{array} \right.$$

$$\underbrace{2 \times \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \times \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}_{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}} = 2 \times \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 2 \times \sqrt{49 - 16 \times 3} = 2 \times \sqrt{1} = 2$$

$$D^2 = 7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3} + 2 = 14 + 2 = \boxed{16} \text{ donc } D = \sqrt{16} = \boxed{4 \in \mathbb{I}}$$

Bonus. On utilise la calculatrice : $\bullet \zeta \pi \chi \chi \blacklozenge \leftrightarrow] \spadesuit \delta \epsilon \heartsuit \delta \alpha$. On obtient : $C \approx \boxed{-9,33}$.

Exercice 2 Nombres premiers

1. Donner la définition d'un nombre premier.

2. Décomposer 1584 et 78408 en produit de facteurs premiers et en déduire :

a) la décomposition en produit de facteurs premiers de 1584^2 .

b) l'écriture de $\sqrt{1584}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers naturels, b étant le plus petit possible.

c) la forme irréductible de la fraction $\frac{1584}{78408}$.

3. On s'intéresse aux nombres entiers qui peuvent s'écrire $p \times q$ où p et q sont deux nombres premiers distincts.

a) Donner deux exemples de tels nombres en expliquant pourquoi.

b) Écrire la liste complète des diviseurs de 77 et de 10.

c) Quelle est la liste des diviseurs d'un nombre de la forme $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts ?

d) Donner la liste des diviseurs d'un nombre de la forme $p \times q \times r$ où p, q et r sont des nombres premiers distincts.

e) Donner un exemple de tel nombre puis écrire la liste complète de ses diviseurs.

1. Un nombre premier est un **entier naturel supérieur ou égal à 2 qui a exactement deux diviseurs positifs** (1 et lui-même).

$\begin{aligned} 2. \quad 1584 &= 2 \times 792 \\ &= 2 \times 2 \times 396 \\ &= 2^2 \times 2 \times 198 \\ &= 2^3 \times 2 \times 99 \\ &= 2^4 \times 3 \times 33 \\ &= 2^4 \times 3 \times 3 \times 11 \\ &= \boxed{2^4 \times 3^2 \times 11} \end{aligned}$	$\begin{aligned} 78408 &= 2 \times 39204 \\ &= 2 \times 2 \times 19602 \\ &= 2^2 \times 2 \times 9801 \\ &= 2^3 \times 3 \times 3267 \\ &= 2^3 \times 3 \times 3 \times 1089 \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 3 \times 363 \\ &= 2^3 \times 3^3 \times 3 \times 121 \\ &= 2^3 \times 3^4 \times 11 \times 11 \\ &= \boxed{2^3 \times 3^4 \times 11^2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{a) } 1584^2 &= (2^4 \times 3^2 \times 11)^2 \\ &= 2^{4 \times 2} \times 3^{2 \times 2} \times 11^2 \\ &= \boxed{2^8 \times 3^4 \times 11^2} \end{aligned}$ $\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{1584} &= \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 11} \\ &= \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{11} \\ &= 2^2 \times 3 \times \sqrt{11} \\ &= \boxed{12\sqrt{11}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1584}{78408} &= \frac{2^4 \times 3^2 \times 11}{2^3 \times 3^4 \times 11^2} \\ &= \frac{2^{4-3}}{3^{4-2} \times 11^{2-1}} \\ &= \frac{2}{3^2 \times 11} \\ &= \boxed{\frac{2}{99}} \end{aligned}$
--	---	---	---

3. a) **6** et **14** sont deux exemples de nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $p \times q$:

2 et 3 sont deux nombres premiers distincts et **6** = 2 × 3.

2 et 7 sont deux nombres premiers distincts et **14** = 2 × 7.

b) 77 = 7 × 11 a quatre diviseurs : **1**, **7**, **11** et **77**.

10 = 2 × 5 a quatre diviseurs : **1**, **2**, **5** et **10**.

c) Dans le cas général, un nombre de la forme $p \times q$ a quatre diviseurs : **1**, **p**, **q** et **p × q**.

d) Un nombre de la forme $p \times q \times r$ a huit diviseurs :

1, **p**, **q**, **r**, **p × q**, **p × r**, **q × r** et **p × q × r**.

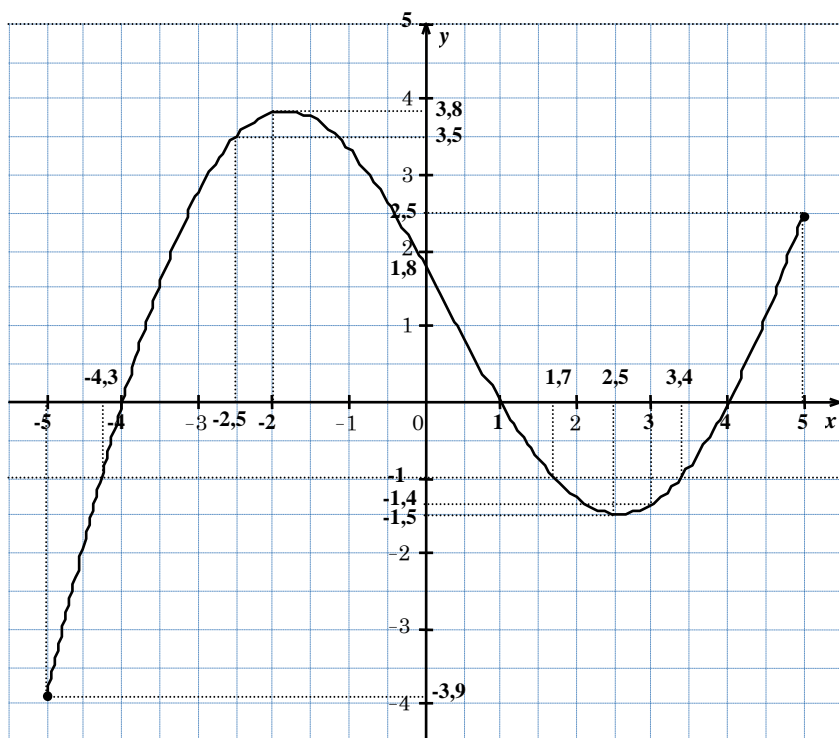
e) **30** est un exemple de nombre de la forme $p \times q \times r$:

2, 3 et 5 sont trois nombres premiers distincts et **30** = 2 × 3 × 5.

30 a huit diviseurs : **1**, **2**, **3**, **5**, **2 × 3 = 6**, **2 × 5 = 10**, **3 × 5 = 15** et **30**.

Exercice 3 Lecture graphique

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f représentée dans le repère ci-dessous.



1. Quel l'ensemble de définition de f ?
2. Donner les images de 0 et -2 par f .
3. Déterminer $f(-2,5)$ et $f(3)$.
4. Donner les antécédents de -1 et 0 par f .
5. Donner un nombre qui n'a qu'un seul antécédent par f .
6. Résoudre les équations suivantes :
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 5$
7. Résoudre l'inéquation suivante : $f(x) < 0$
8. Dresser le tableau de variation de f .
9. Donner, s'ils existent, le minimum et le maximum de f .

1. L'ensemble de définition de f est l'intervalle $[-5; 5]$.

2. L'image de $x = 0$ par la fonction f est $y = 1,8$: $f(0) = 1,8$.

L'image de $x = -2$ par la fonction f est $y = 3,8$: $f(-2) = 3,8$.

3. L'image de $x = -2,5$ par la fonction f est $y = 3,5$: $f(-2,5) = 3,5$.

L'image de $x = 3$ par la fonction f est $y = -1,4$: $f(3) = -1,4$.

4. Les antécédents de $y = -1$ par la fonction f sont : $x = -4,3$ ou $x = 1,7$ ou $x = 3,4$.

Les antécédents de $y = 0$ par la fonction f sont : $x = -4$ ou $x = 1$ ou $x = 4$.

5. Le nombre $y = -3,9$ n'a qu'un seul antécédent $x = -5$ par f (dans cette question on peut donner tous les nombres y qui appartiennent à l'intervalle $[-3,9; -1,5[$ ou encore $y = 3,8$).

6. a) L'équation $f(x) = 0$ a pour solutions $x = -4$ ou $x = 1$ ou $x = 4$.

b) L'équation $f(x) = 5$ n'a pas de solution sur l'intervalle $[-5; 5]$.

7. L'inéquation $f(x) < 0$ a pour solutions $x \in [-5; -4[\cup]1; 4[$.

8. Tableau de variation de f :

9. Le minimum de f est $f(-5) = -3,9$.

Le maximum de f est $f(-2) = 3,8$.

x	-5	-2	2,5	5
$f(x)$	-3,9	3,8	-1,5	2,5

Exercice 4 Résolution d'équations

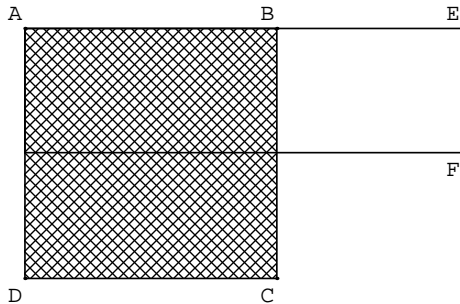
1. Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{x-2}{x+1} = \frac{5}{3}$ b) $2x - 3(x+5) = 4(x-2) - 7$ c) $(x-5)(2-x) + 4(x-5) = 0$ d) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

2. Mise en équation.

A l'occasion d'un remembrement, le champ carré de Jean a été transformé en champ rectangulaire. Deux cotés opposés du champ carré ont été augmentés de 300 m, les deux autres cotés ont été diminués de 200 m, afin d'obtenir un champ rectangulaire.

Après le remembrement, Jean constate que l'aire de son champ a diminué de 10 000 m².



On note x la mesure du coté du champ carré initial.
En trouvant une équation vérifiée par x , trouver la longueur du champ initialement.

1. a) $\frac{x-2}{x+1} = \frac{5}{3}$

Cette équation a une valeur interdite : $x+1 \neq 0$ donc $x \neq -1$.

Pour la résoudre, on peut alors faire "un produit en croix" :

$$3(x-2) = 5(x+1)$$

$$3x - 6 = 5x + 5$$

$$3x - 5x = 6 + 5$$

$$-2x = 11$$

$$x = -\frac{11}{2}$$

c) $(x-5)(2-x) + 4(x-5) = 0$

$$(x-5)[(2-x)+4] = 0$$

$$(x-5)(6-x) = 0$$

$$x-5 = 0 \text{ ou } 6-x = 0$$

$$x = 5 \text{ ou } x = 6$$

b) $2x - 3(x+5) = 4(x-2) - 7$

$$2x - 3x - 15 = 4x - 8 - 7$$

$$2x - 3x - 4x = 15 - 8 - 7$$

$$-5x = 0$$

$$x = \frac{0}{-5}$$

$$x = 0$$

d) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x+2 = 0 \text{ ou } x-3 = 0$$

$$x = -2 \text{ ou } x = 3$$

2. Initialement, l'aire du champ carré était égale à : $x \times x = x^2$.

Après le remembrement, l'aire du champ est égale à : $(x+300) \times (x-200)$.

On a donc $(x+300) \times (x-200) = x^2 - 10000$

$$x^2 + 300x - 200x - 60000 = x^2 - 10000$$

$$x^2 - x^2 + 300x - 200x = 60000 - 10000$$

$$100x = 50000$$

$$x = 500$$

La longueur du champ carré initial était donc de 500 m .