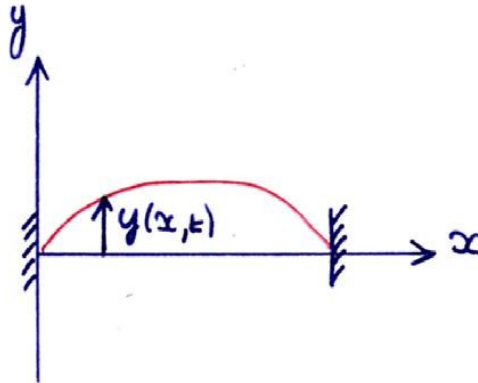


# Compléments *à titre indicatif* sur les cordes vibrantes et les colonnes d'air.

Ce qui suit est donné pour simple information, et est totalement hors programme du cours de terminale ( l'étude théorique de la corde et de la colonne d'air se fait en CPGE et à la faculté).

## I) Corde vibrante:



### 1)Equation différentielle:

La seconde loi de Newton conduit pour la fonction *de deux variables*  $y(x,t)$ , à:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

avec pour expression de la vitesse de propagation:

$$V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{où } T = \text{tension de la corde et } \mu = \text{masse linéique.}$$

### 2)Solution de cette équation:

L'onde stationnaire solution de l'équation précédente, a pour expression générale :

$$y(x,t) = [A \cos(2\pi f t) + B \sin(2\pi f t)] [C \cos(2\pi f x/V) + D \sin(2\pi f x/V)]$$

où pour l'instant  $f$  est une constante quelconque ( $A, B, C$  et  $D$  sont aussi des constantes).

### 3)Détermination de f en utilisant les conditions limites:

Corde fixe à tout instant en  $x = 0$  et  $x = L$ :

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad \text{quelque soit } t.$$

Cela conduit à :

- >  $C = 0$
- >  $f_k = kV/2L$ , ou encore  $2L = k\lambda$ .

**L'expression des fréquences propres de vibration vient donc des conditions aux limites** (conditions imposées aux deux extrémités de la cordes).

### 4)Modes propres de vibrations:

#### a)Mode fondamental: k = 1

$$y_1(x,t) = \sin(\pi x/L) [A_1 \cos(\pi Vt/L) + B_1 \sin(\pi Vt/L)]$$

Pour  $t$  fixé la forme de la corde est donc  $y_1(x) = \text{cte} * \sin(\pi x/L)$ :



**b) Mode harmonique de rang k = 2:**

$$f_2 = 2V/2L = V/L$$

$$y_2(x,t) = \sin(2\pi x/L) [A_2 \cos(2\pi Vt/L) + B_2 \sin(2\pi Vt/L)]$$

Pour t fixé la forme de la corde est donc  $y_2(x) = cte \cdot \sin(2\pi x/L)$ :



**5) Solution la plus générale de l'équation différentielle:**

Principe de superposition:

On démontre en mathématique que la solution la plus générale de l'équation différentielle du 1), s'écrit comme la somme des modes propres de la corde:

$$y(x,t) = \sum \sin(k\pi x/L) [A_k \cos(k\pi Vt/L) + B_k \sin(k\pi Vt/L)] \text{ (où la somme porte sur l'indice entier k)}$$

**6) Détermination des coefficients  $A_k$  et  $B_k$  :**

On utilise les conditions initiales:

- > forme de la corde à l'instant initial
- > vitesse de la corde à l'instant initial.

**II) Colonne d'air:**

**1) Equation différentielle:**

La pression à t en un point M de la colonne s'écrit  $P(M,t) = P_0 + P_1(M,t)$  où  $P_1(M,t)$  est appelée surpression ( $P_0$  étant la pression atmosphérique).

En appliquant à une tranche d'air:

- > la seconde loi de Newton (que vous verrez dans la partie mécanique du cours de physique de TS)
- > la conservation de la masse (lors d'une compression ou dilatation, la masse de la tranche d'air considérée ne varie pas)
- > l'hypothèse que le passage de l'onde est isentropique (ie réversible, et sans échange de chaleur d'une tranche d'air à l'autre)

on démontre que, à nouveau, **la fonction à deux variables**  $P_1(M,t)$  obéit à une équation de la forme:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}$$

où V est la vitesse du son dont l'expression est :

$$V = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

Dans cette formule R est la constante des gaz parfaits (8,31 SI), T la température en degré Kelvin, M la masse molaire (29g/mol pour l'air constitué de 20% de  $O_2$  et 80% de  $N_2$ ), et gamma est une

constante (1,4 pour l'air).

### 2)Solution de cette équation:

Là encore l'onde stationnaire a pour expression :

$$P_1(x,t) = [A \cos(2\pi f t) + B \sin(2\pi f t)] [C \cos(2\pi f x/V) + D \sin(2\pi f x/V)]$$

où pour l'instant  $f$  est une constante quelconque ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont aussi des constantes).

### 3)Détermination de la fréquence $f$ en utilisant les conditions limites:

**Là encore l'expression des modes propres de vibration de la colonne d'air dépend des conditions aux limites (colonne ouverte ou colonne fermée).**

- si la colonne est ouverte alors à l'extrémité  $P = P_0$  de l'air ambiant, ce qui conduit, pour une colonne *ouverte aux deux extrémités*, aux mêmes modes propres que pour la corde, à savoir  $f_k = kV/2L$ , ou encore  $2L = k\lambda$ .
- si la colonne est fermée à une des extrémités, alors il y a un noeud de déplacement de l'air sur l'extrémité (et on démontre qu'il y a aussi un ventre de surpression sur cette même extrémité fermée), et on trouve une expression différente pour l'expression des modes propres de vibration :  $f_k = (k+ 1/2) V/2L$  où le mode fondamental correspond à  $k = 0$ .

### **Conclusion:**

1)Selon que la colonne est ouverte ou fermée les modes propres ne sont pas les mêmes.

2)Par contre **dans tous les cas** entre deux noeuds consécutifs il y a  $\lambda/2$ .

3)Pour une colonne *ouverte aux deux extrémités* on a les mêmes modes propres que pour la corde fixe aux deux extrémités (là où il y a un noeud de déplacement pour la corde on a un noeud de surpression pour la colonne....)